

· 冶炼与凝固 ·

## 基于相场法模拟 VAR 强迫流场中柱状晶生长



周 杨, 朱红春, 李花兵, 姜周华, 何志禹, 倪卓文  
(东北大学冶金学院, 沈阳 110819)

**摘 要:** 基于相场法建立了流-热-质全耦合模型, 模拟了真空自耗电弧重熔 (VAR) 过程铸锭柱状晶在强制流场中的生长。对比柱状晶在有/无流场条件下的生长特征解析熔体流动对柱状晶生长的影响机制。模拟结果表明, 凝固前沿流场速度大小为  $45 \mu\text{m/s}$ , 方向与枝晶生长方向垂直时, 二次枝晶表现出“迎流”生长, 枝晶干受冲刷作用向下游倾斜; 相邻枝晶形成细小涡流, 枝晶干上游侧溶质和热量随熔体带入下游侧, 上游侧溶质和温度边界层厚度减小, 由无流场时的  $51 \mu\text{m}$  降至  $31.5 \mu\text{m}$ , 温度梯度大促进二次枝晶发展; 下游侧边界层溶质和热量富集程度大, 边界层厚度增至  $78 \mu\text{m}$ , 梯度减小明显抑制二次枝晶发展。下游溶质浓度高于无流场情况, 枝晶生长缓慢增大微观偏析风险。

**关键词:** 真空自耗电弧重熔; 相场法; 柱状晶生长; 强制流场; 溶质场; 温度场

DOI: 10. 20057/j. 1003-8620. 2024-00078 中图分类号: TF132

## Simulation of Columnar Crystal Growth in Forced Flow of VAR Based on Phase Field Method

Zhou Yang, Zhu Hongchun, Li Huabing, Jiang Zhouhua, He Zhiyu, Ni Zhuowen  
(School of Metallurgy, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract:** A fully coupled flow heat mass model was established based on the phase field method to simulate the growth of columnar crystals in ingots during vacuum arc remelting (VAR) in a forced flow field. The influence mechanism of melt flow on the growth of columnar crystals was analyzed by comparing the growth characteristics of columnar crystals with and without flow field conditions. The simulation results indicated that when the velocity of flow field in the solidification front is  $45 \mu\text{m/s}$  and the direction is perpendicular to the direction of dendrite growth, the secondary dendrites exhibit ‘counter-flow’ growth, and the dendrite trunks tilt downstream due to erosion. A small eddy current is formed between adjacent dendrites, and the solutes and the heat in the upstream of the dendrite trunks are carried into the downstream side with the melt. The boundary layer thickness of the solute and the temperature on the upstream side decreases, from  $51 \mu\text{m}$  in the absence of a flow field to  $31.5 \mu\text{m}$ . The large temperature gradient promotes the development of secondary dendrites. The concentration of solutes and heat in the downstream boundary layer is high, and the boundary layer thickness increases to  $78 \mu\text{m}$ . The decrease in gradient significantly inhibits the development of secondary dendrites. The downstream solute concentration is higher than that in the absence of a flow field, and the slow growth of dendrites increases the risk of micro-segregation.

**Key Words:** Vacuum Arc Remelting; Phase Field; Columnar Crystal Growth; Forced Flow Field; Solute Field; Temperature Field

真空自耗电弧重熔 (VAR) 是一种使用自耗电电极 (待重熔的金属) 作为阴极, 模具作为阳极, 利用在真空条件下施加电流产生的极间电弧熔化自耗电电极, 金属熔滴落入水冷坩埚中形成铸锭, 实现重熔精炼的工艺。目前, 高温合金、超高强度钢等特种合金通常使用 VAR 作为精炼的关键工艺, 其冶金质量, 如凝固组织、元素分布和缺陷, 直接决定了合金的力学性能和应用价值<sup>[1-2]</sup>。

真空自耗电重熔铸锭的组织主要为柱状晶, 枝晶生长是一种无序且复杂的形态演化过程, 涉及固液

界面移动、能量传递以及熔体流动<sup>[3]</sup>。其中熔体流动会改变液相中溶质和热量分布, 影响凝固过程的一致性, 造成偏析和缩孔等缺陷, 进而削弱合金的力学性能<sup>[4-6]</sup>。因此, 研究流场对 VAR 凝固过程枝晶生长的影响具有重要意义。

因 VAR 工艺特性, 无法直接观察枝晶生长过程, 只能借助数值仿真模拟将其可视化。相场法因其可连续描述相变过程的优点, 现已成为研究枝晶生长的有力工具<sup>[7-8]</sup>。最近, 相场模型已经扩展到耦合流场, 为研究枝晶生长与熔体对流的相互作用提

基金项目: 国家自然科学基金资助 (Nos. 52374330/52325406)

作者简介: 周 杨 (1996—), 男, 博士; E-mail: zhouyang9967@163.com; 收稿日期: 2024-04-04

通信作者: 朱红春 (1989—), 男, 博士, 副教授; E-mail: zhuhc@smm.neu.edu.cn

供了新的方法<sup>[9-11]</sup>。Zhang A 等<sup>[9]</sup>用相场法定量研究了过冷熔体中液相流动对单个等轴晶生长和二次枝晶生长动力学的影响。Yu A S 等<sup>[11]</sup>利用格子-玻尔兹曼法和相场法模拟了等轴晶在流场中生长和运动。Yang S L 等<sup>[12]</sup>利用数值模拟方法实现了真空自耗重熔过程温度变化和传热机制可视化。目前有大量研究集中在强制对流作用下凝固温度场和相场变化, 但将温度场、溶质场、相场和流场进行耦合的研究内容较少, 因此, 建立流-热-质全耦合模型研究自耗熔池内流场对枝晶生长特征的影响具有重要意义。

以 8Cr4Mo4V 轴承钢为例, 采用相场法研究 VAR 过程过冷熔体强制流动作用对柱状晶生长的影响。该方法基于二元合金相场模型理论, 建立流场与温度、溶质控制方程全耦合的数学模型。对比有无流场条件下柱状晶生长特征, 定性的研究熔体流动作用对枝晶特征的影响, 定量对比枝晶不同位置温度和溶质浓度变化, 解析合金凝固过程中强制流动对枝晶形貌和微观偏析的作用机制。

## 1 模型建立

### 1.1 数学模型

研究基于 Ohno<sup>[13]</sup>开发的等温凝固相场模型, 该模型广泛应用于二维定向凝固研究。在该模型中, 定义相场变量  $\phi \in [-1, 1]$ ,  $\phi=1$  表示固相,  $\phi=-1$  表示液相, 相场变量在界面扩散区域连续变化。在相场模型的基础上将能量和溶质控制方程与流场方程耦合, 熔体速度  $V$  通过求解 NS 方程获得。有关公式的推导过程在文献中有详细介绍<sup>[13-16]</sup>, 模型控制方程表达如式(1)。

$$\begin{aligned} & [1 + (1 - k)u] a_s(\nabla\phi)^2 \frac{\partial\phi}{\partial t} = \nabla \cdot \left[ a_s(\nabla\phi)^2 \nabla\phi \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_s(\nabla\phi) \partial a_s(\nabla\phi)}{\partial\phi_x} |\nabla\phi|^2 \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a_s(\nabla\phi) \partial a_s(\nabla\phi)}{\partial\phi_y} |\nabla\phi|^2 \right) + \phi - \phi^3 - \\ & \lambda^*(1 - \phi)^2(u + \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

该式为无量纲相场控制方程,  $a_s(\nabla\phi)$  表示晶粒的各向异性,  $a_s(\nabla\phi) = 1 + \varepsilon \cos(4\phi)$ ,  $\varepsilon$  是表征各向异性强度的无量纲参数;  $\lambda^*$  是相关的耦合系数, 其表达式为  $\lambda^* = a_1 W/d_0$ , 式中  $a_1=0.8839$ ,  $W$  是界面宽度,  $\mu\text{m}$ ,  $d_0$  是化学毛细管长度,  $\mu\text{m}$ , 表达式  $d_0 = k\Gamma/[|m|(1-k)c_\infty]$ ,  $k$  是溶质分配系数,  $\Gamma$  是 Gibbs-Thomson 常数,  $K \cdot \mu\text{m}$ ,  $m$  是液相线斜率,

$K \cdot \text{at.}\%^{-1}$ ,  $c_\infty$  液相中溶质初始浓度,  $\text{at.}\%$ ;  $u$  为无量纲过饱和度,  $\theta$  为无量纲过冷度。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [1 + k - (1 - k)\phi] \frac{\partial u}{\partial t} + (1 - \phi) \vec{V} \cdot \nabla u = \\ & \nabla \cdot \left[ D_1 \frac{(1 - \phi)}{2} \nabla u - j_{AT} \right] + \frac{1}{2} [1 + (1 - k)u] \frac{\partial\phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (1 - \phi) \vec{V} \cdot \nabla\theta = D_T \nabla^2\theta + \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (3)$$

$$\vec{j}_{AT} = \frac{1}{2\sqrt{2}} W [1 + (1 - k)u] \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} \quad (4)$$

式(2)(3)为耦合流场条件下浓度场和温度场控制方程,  $\vec{V}$  是溶体流速,  $\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $D_1$  为溶质扩散系数,  $\mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $D_T$  为温度扩散系数,  $\mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ; 式(4)中  $\vec{j}_{AT}$  为反溶质截留项。

$$\nabla \cdot [(1 - \phi) \vec{V}] = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t [(1 - \phi) \vec{V}] + (1 - \phi) \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -(1 - \phi) \nabla p/\rho + \\ & \nabla \cdot [\nu \nabla (1 - \phi) \vec{V}] + \vec{M}_1^d \end{aligned} \quad (6)$$

$$\vec{M}_1^d = -\nu \frac{2h\phi^2(1 - \phi)}{W_0^2} \vec{V} \quad (7)$$

上式为不可压缩流体的质量和动量守恒方程。公式(7)  $M_1^d$  是 Beckerman 等提出的单位体积耗散界面力<sup>[17]</sup>, 无量纲量  $h=2.757$ , 这一项在扩散界面区域充当分布动量汇, 迫使接近固体的液体速度为零。

### 1.2 参数设置

模型计算域设为  $450 \mu\text{m} \times 450 \mu\text{m}$  方形区域, 网格间距设置为  $\Delta x = \Delta y = 0.75 \mu\text{m}$ , 使用均匀时间步长  $\Delta t = 2.6 \times 10^{-5} \text{s}$ , 迭代计算  $10^5$  步。流场 NS 方程通过 SIMPLE 算法进行数值求解, 采用双交错网格, 将速度场和压力场的离散网格错开, 如图 1 所示。每个网格节点速度分解为水平方向速度  $v$  和垂直方向速度  $u$ , 模拟计算区域为等压力场。

计算模拟 8Cr4Mo4V 轴承钢凝固过程的枝晶生长, 其材料物性参数见表 1。凝固开始时, 均匀液相中溶质无量纲过饱和浓度  $u=0.3$ , 初始液相温度  $T_0=1700 \text{K}$ 。

模拟枝晶在水平流场中生长情况, 枝晶位置始终固定, 可看作一个“孤岛”, 开始时将半径为  $R$  的形核点固定在计算域中心, 给场中液相添加一个水平方向的初速度, 垂直方向速度为零, 具体初始条件如式(8)。

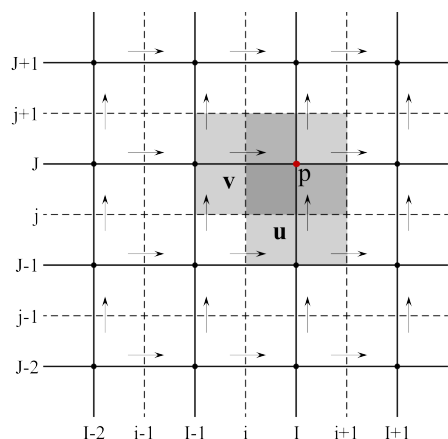


图 1 交错网格示意图

Fig. 1 Schematic diagram of staggered grid

表 1 8Cr4Mo4V 轴承钢材料物性参数

Table 1 Material properties parameters of 8Cr4Mo4V bearing steel

$c_s /$ (at.%)	$W / \mu\text{m}$	$D_l /$ ( $\mu\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	$k$	$\varepsilon$	$\Gamma /$ $\text{K} \cdot \mu\text{m}$	$m /$ ( $\text{K} \cdot \text{at.}\%^{-1}$ )	$T_m / \text{K}$
10.4	0.937 5	3 000	0.49	0.02	0.24	8.4	1 721

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2, \phi = 1, \Delta T = 0, V = 0 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, P = 0 \\ x^2 + y^2 \geq R^2, \phi = -1, \Delta T = -8, V = 45 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, P = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$x, y$  是任意点在以计算域中心为原点的坐标系

中的位置,  $\Delta T$  为过冷度, 设定形核种子是过冷度为 0 的固相,  $V$  为流速大小,  $P$  为流场中的压力差, 模型中为等压流场, 各处压力差均为 0。对于, 将相场、温度场和浓度场计算区域边界设为 Zero-Neumann 绝热条件, 表达式如式(9)。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

表示物理量在计算域边缘各个方向( $n$ )上的变化为 0。

## 2 模型验证

图 2 为等轴晶在流场中的浓度场和温度场分布情况。图 2(a) 为本文所用模型模拟结果, 图 2(b) 为枝晶轮廓和沿等轴晶中轴线相场, 溶质浓度比和过冷度溶质和温度场变化曲线, 图 2(c)(d) 为文献[18]中对应模拟结果, 图 2 中表述的均为无量纲化结果。由图 2 中可以看出, 熔体流动对枝晶生长特征产生显著影响, 上游枝晶生长发达, 二次枝晶数量更多, 下游枝晶生长受到抑制。随着熔体流动, 因凝固再分配排斥到液相中的溶质与凝固潜热一同从上游枝晶尖端被扫走, 沿着上游二次枝晶外廓向下流动, 绕过侧臂尖端在下游枝晶干区域富集。根据相图理论, 溶质浓度增加会降低液相线温度, 溶质和热量在下游堆积抑制了枝晶的发展和生

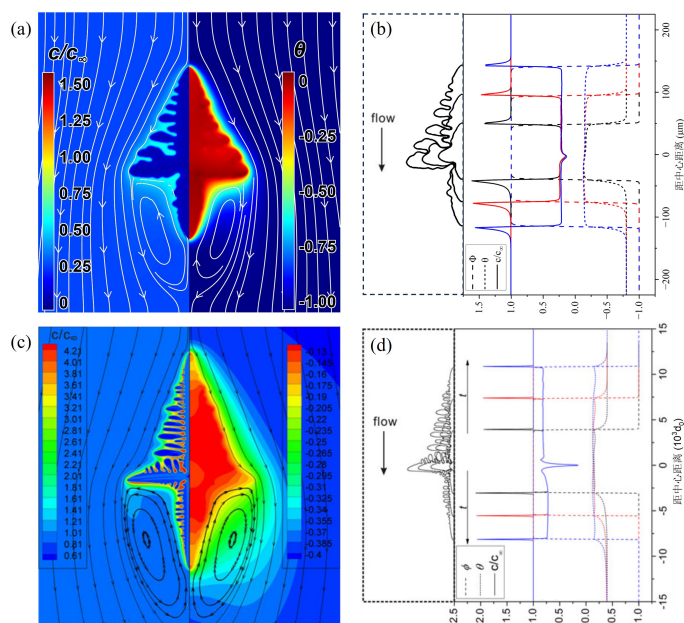


图 2 等轴晶在流场中的浓度场和温度场分布情况: (a) 对流条件下溶质和过冷度云图, (b) 枝晶轮廓及中轴线相场、无量纲化的浓度比和过冷度变化, (c)(d) 为文献[18]中对应结果

Fig. 2 Distribution of concentration field and temperature field of equiaxed crystals in flow field: (a) contour maps of solute and supercooling with convective, (b) the outlines of dendrite, variation of phase field, dimensionless concentration ratio and supercooling along the axial, (c) (d) the corresponding result in the literature [18]

长,反之,上游保持较高过冷度,枝晶生长得到促进,枝晶表现出“迎流”生长。本文模拟的各物理场结果与文献结果一致,模型准确性得到验证<sup>[18]</sup>。

### 3 流场对柱状晶生长的影响

#### 3.1 流场对枝晶形态的影响

图3为无流场条件下柱状晶的相场、浓度场和温度场分布云图。计算域底部边界有3个形核点作为形核种子等距分布,枝晶在此发展生长。枝晶干垂直于底面生长,二次枝晶与枝晶干正交,靠近根部的二次枝晶略微向上倾斜。结合图3(b)(c)可以看出,凝固过程潜热的释放和溶质再分配共同作用导致枝晶根部热量堆积且溶质浓度升高,从而二次枝晶向相枝晶间低温低浓度区域倾斜。各柱状晶的形态特征、溶质场分布和温度场基本相同,表明在无流场干扰时枝晶生长处于稳定状态。

图4显示了水平流场条件下的枝晶生长模拟结果。对流速度水平分量为 $v=45 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,垂直分量 $u=0 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。熔体从左向右水平流动,上下游枝晶形态存在显著差异。由于熔体流动对枝晶不断冲刷,枝晶干向下游倾斜,与水平形核面形成的夹角 $\alpha$

约 $83^\circ$ 。上游侧的二次枝晶更为发达,下游侧仅出现少量细小凸起,因为熔体在相邻枝晶之间产生细小涡流,相邻枝晶B上游侧部分溶质随涡流移动到A枝晶下游侧,枝晶间隙底部的溶质随熔体流动至枝晶下游侧,部分溶质越过枝晶尖峰相下游移动,最终枝晶上游侧始终保持较大的温度梯度,下游溶质和热量堆积,导致枝晶上游侧二次枝晶发展受到促进而下游侧的二次枝晶发展被抑制。此外,枝晶间涡流明显改变二次枝晶生长方向,二次枝晶向斜上方生长,二次枝晶前端富集的溶质和热量被流体带走,增大温度梯度,枝晶沿温度梯度方向生长导致倾斜。

#### 3.2 流场对边界层厚度的影响

图5为枝晶尖端所在直线的相场,溶质浓度和过冷度变化。由图5(a)中可知,浓度和温度在枝晶尖端边缘达最大值。无流场状态各枝晶生长状态一致,枝晶尖端两侧浓度和温度变化曲线关于枝晶干轴对称,枝晶上下游侧的溶质边界层厚度相等 $L_1=L_1'=51 \mu\text{m}$ ;由图5(b)可知,水平流场中枝晶尖端上游侧溶质浓度达 $1.76c_x$ 略低于下游侧的 $1.86c_x$ ,溶质边界层下游侧 $L_2'=78 \mu\text{m}$ ,显著大于上游侧 $L_2=31.5 \mu\text{m}$ ,相较无流场时 $L_2'>L_1'=L_1>L_2$ 。此时

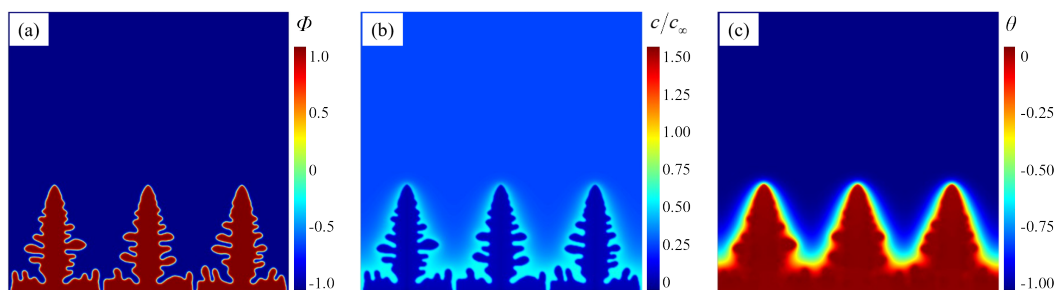


图3 无流场条件下柱状晶生长模拟结果:(a)相场,(b)无量纲化的浓度比,(c)过冷度

Fig. 3 Simulation results of columnar crystal growth under no flow field conditions: (a) phase field, (b) dimensionless concentration ratio, (c) supercooling

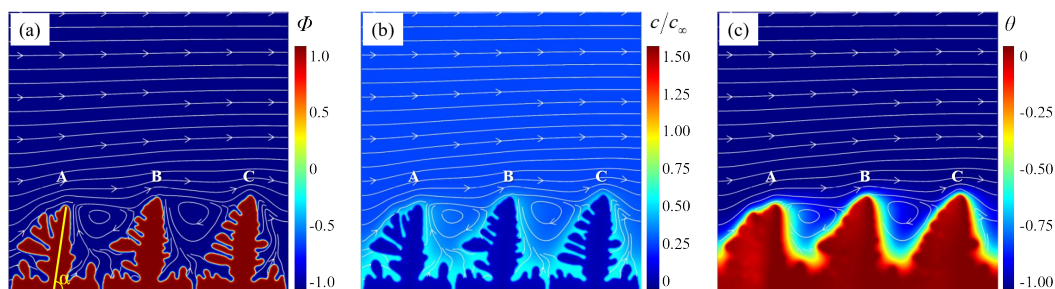


图4 水平流场条件下柱状晶生长模拟结果:(a)相场,(b)无量纲化的浓度比,(c)过冷度

Fig. 4 Simulation results of columnar crystal growth under horizontal flow field conditions : (a) phase field, (b) dimensionless concentration ratio, (c) supercooling

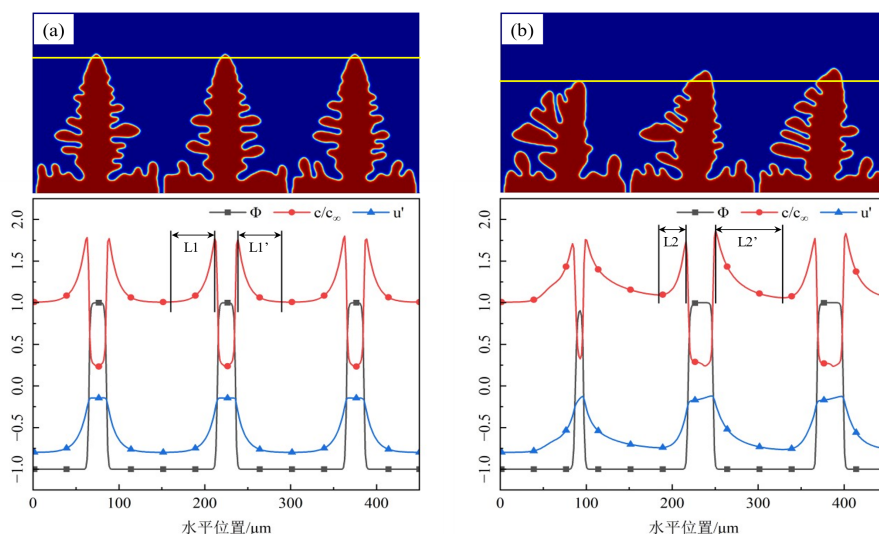


图 5 枝晶尖端所在直线相场、无量纲化的浓度比和过冷度曲线:(a)无流场,(b)水平流场

Fig. 5 Phase field, dimensionless concentration ratio, and supercooling curve at the height of the dendrite tip : (a) without flow, (b) horizontal flow

溶质和热量在下游侧区域不断富集,也增加了形成微观偏析的风险。

图 6 分别为枝晶尖端上下游溶质浓度和过冷度

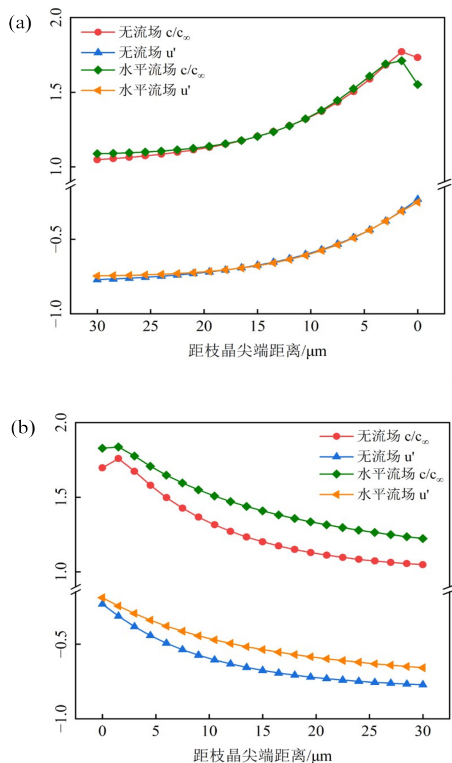


图 6 枝晶尖端无量纲化的浓度比和过冷度曲线:(a)上游侧,(b)下游侧

Fig. 6 Dimensionless concentration ratio and supercooling curves of the dendritic tip : (a)upstream side, (b)downstream side

变化曲线,同侧浓度和过冷度变化趋势一致。流场中枝晶上游侧靠近枝晶尖端处的溶质溶度和温度均低于无流场情况,溶质过饱和度和温度降低,过冷度增大提升了上游侧枝晶生长动力;上游侧远离枝晶尖端处表现出相反结果,有流场情况的溶质溶度和温度均高于无流场情况,这是由于相邻枝晶的溶质和热量随流动运动到枝晶间,提升了枝晶间的溶质浓度和温度。枝晶下游侧在无流场条件下浓度和温度低,曲线斜率绝对值大,即溶质和温度梯度大,加入流场后浓度和温度均明显提升,梯度减小。水平流场中枝晶下游侧的高浓度、热富集和缓降低的特征直接导致了下游枝晶生长受到抑制,并且枝晶下游侧溶质富集也增大了微观偏析的风险。

#### 4 结论

基于相场法模拟了 VAR 强制流场中铸锭柱状晶的生长,通过对比有无流场条件下的枝晶生长特征明晰熔体流动对柱状晶生长特征的影响,得出以下结论。

(1)枝晶前沿流体速度大小为  $45 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,方向与生长方向垂直时,枝晶干向下游倾斜,与水平面夹角约  $83^\circ$ ,二次枝晶生长表现出“迎流”生长,枝晶上游侧二次枝晶数量和长度明显高于下游侧。

(2)无流场时枝晶尖端两侧溶质、温度边界层厚度一致,达  $51 \mu\text{m}$ ,强制流场中枝晶上游侧边界层厚度减小至  $31.5 \mu\text{m}$ ,下游侧边界层厚度增大至  $78 \mu\text{m}$ 。

(3)流场中枝晶下游侧溶质浓度和热量表现出富集程度大,梯度小的特点,直接导致二次枝晶受

抑制,增加微观偏析风险,降低凝固前沿熔体流速,有利于减小微观偏析。

#### 参考文献

- [1] 姜周华,董艳伍,李花兵,等. 特殊钢特种冶金技术的新发展[J]. 中国冶金, 2011, 21(12): 1-10.
- [2] 何曲波,王东哲,刘海定,等. VIM-ESR-VAR 三联冶炼工艺对 9Cr18Mo 轴承钢洁净度的影响[J]. 特殊钢, 2018, 39(1): 24-27.
- [3] Wang Y D, Zhang L F, Zhang J, et al. Simulation of Solidification Structure During Vacuum Arc Remelting Using Cellular Automaton -Finite Element Method[J]. steel research international, 2022, 93(1): 2100408.
- [4] 宁 静,王 敖,毕正绪,等. 基于仿真的 M54 超高强度钢真空自耗重熔工艺优化[J]. 特殊钢, 2023, 44(5): 60-68.
- [5] 姜周华, Lev Medovar, Ganna Stovpchenko, 等. 第二代液态电渣冶金技术的发展[J]. 钢铁研究学报, 2013, 25(3): 1-7.
- [6] 王晓辉,张雪凌,王 林,等. 低成本耐腐蚀高强度不锈钢的成分均匀性控制研究[J]. 特殊钢, 2023, 44(5): 69-75.
- [7] 常荷茜. 铝合金焊接熔池凝固过程枝晶生长相场法模拟[D]. 石家庄: 河北科技大学, 2022.
- [8] Lenart R, Eshraghi M. Modeling columnar to equiaxed transition in directional solidification of Inconel 718 alloy[J]. Computational Materials Science, 2020, 172(C): 109374.
- [9] Zhang A, Jiang B, Guo Z P, et al. Solution to Multiscale and Multiphysics Problems: A Phase-Field Study of Fully Coupled Thermal-Solute - Convection Dendrite Growth [J]. Advanced Theory and Simulations, 2021, 4(3): 2000251.
- [10] Nabavizadeh S A, Eshraghi M, Felicelli S D. Three-dimensional phase field modeling of columnar to equiaxed transition in directional solidification of Inconel 718 alloy [J]. Journal of Crystal Growth, 2020, 549: 125879.
- [11] Yu A S, Yang X J, Guo H M. Phase field lattice Boltzmann model for non-dendritic structure formation in aluminum alloy from LSPSF machine[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2020, 30(3): 559-570.
- [12] Yang S L, Tian Q, Yu P, et al. Numerical simulation and experimental study of vacuum arc remelting (VAR) process for large-size GH4742 superalloy [J]. Journal of Materials Research and Technology, 2023, 24: 2828-2838.
- [13] Ohno M, Matsuura K. Quantitative phase-field modeling for dilute alloy solidification involving diffusion in the solid [J]. Physical Review E, , Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2009, 79(3): 031603.
- [14] Zhang A, Guo Z P, Jiang B, et al. Effect of laser shock on lamellar eutectic growth: A phase-field study [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2022, 183: 122069.
- [15] Takaki T, Sakane S, Ohno M, et al. Large - scale phase - field lattice Boltzmann study on the effects of natural convection on dendrite morphology formed during directional solidification of a binary alloy [J]. Computational Materials Science, 2020, 171: 109209.
- [16] Jaehoon L, Munekazu O, Yasushi S, et al. Uniquely selected primary dendrite arm spacing during competitive growth of columnar grains in Al - Cu alloy [J]. Journal of Crystal Growth, 2021, 558: 126014.
- [17] Badillo A, Beckermann C. Phase-field simulation of the columnar-to-equiaxed transition in alloy solidification [J]. Acta Materialia, 2006, 54(8): 2015-2026.
- [18] Guo Z P, Mi J, Xiong S, et al. Phase field simulation of binary alloy dendrite growth under thermal- and forced-flow fields: An implementation of the parallel - multigrid approach [J]. Metallurgical and Materials Transactions B, 2013, 44(4): 924-937.